



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρ. σχολ. βιβλίου σελ.186

A2. Θεωρ. σχολ. βιβλίου σελ.142

A3. Θεωρ. σχολ. βιβλίου σελ.162

A4.α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fog είναι:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \leq 1\}$$

$$D_{fog} = \{x \geq 0 \text{ και } 0 \leq x \leq 1\}$$

$$D_{fog} = [0, 1]$$

Ο τύπος της fog είναι:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

$$\Leftrightarrow (fog)(x) = \sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow (fog)(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (fog)(x) = (x - 1)^2 \text{ με } x \in [0, 1]$$

B2. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με $h(x_1) = h(x_2)$ έχουμε:

$$h(x_1) = h(x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$



$$\Leftrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \quad \text{αφού } 1 \leq 0 \text{ και } x_2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -x_1 + 1 = -x_2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η h είναι "1-1" και αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $h(x) = y$ ως προς x με $x \in [0,1]$

$$\text{Είναι } h(x) = y$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = y$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = \sqrt{y}, \quad y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 1 = \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$$

Επομένως $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ με $x \in [0,1]$

$$\text{B3.i) Είναι } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών.

Εξετάζω τη συνέχεια της φ στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{(1 + \sqrt{x})(1 - x)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή φ συνεχής στο $x_0 = 1$

Επομένως φ συνεχής στο $[0,1]$

$$\varphi(0) = 1$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Επομένως, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$



ii) Είναι $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 $\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2}$ διότι ημx γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$

Η φ συνεχής στο $[0,1]$ και ημ α είναι ενδιάμεση τιμή των $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο $(-\infty, -1)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \\ \Leftrightarrow f'(x) &= (-2x)' \\ \Leftrightarrow f(x) &= -2x + c_1 \quad (1) \end{aligned}$$

Στο $(-1, +\infty)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow f'(x) &= (x^3 - x)' \\ \Leftrightarrow f(x) &= x^3 - x + c_2 \quad (2) \end{aligned}$$

Όμως $0(0,0) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 0$ και από (2) για $x = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Άρα $f(x) = x^3 - x, x \in (-1, +\infty)$

Η f συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο $x_0 = -1$ οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = f(-1) \\ \Leftrightarrow -2(-1) + c_1 &= -1 + 1 = f(-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2 = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \in (-\infty, -1) \\ 0, & x = -1 \\ x^3 - x, & x \in (-1, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Έχουμε ότι $f(x) = x^3 - x, x > -1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 - 1$



Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$$

Όμως η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 οπότε $\Lambda(0, -2) \in \varepsilon$

$$\text{Οπότε } -2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 = 2$$

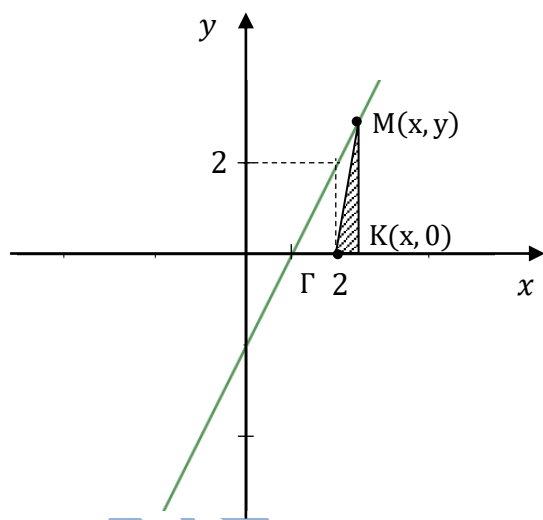
$$\Leftrightarrow x_0^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 1$$

$$\text{Άρα } A(1, f(1)) \equiv A(1, 0) \text{ και } \varepsilon: y - 1 + 1 = (3 \cdot 1^2 - 1)(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Γ3. Βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού του τριγώνου MKG ως συνάρτηση του x



Έχουμε ότι $K(x, 0)$

Τότε

$$MK = |y| = 2x - 2 \text{ διότι}$$

$$2x - 2 > 0 \text{ για } x > 2$$

$$ΓΚ = |x - 2| = x - 2, \text{ για } x > 2$$

Τότε

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (MK)(ΓΚ) = \frac{1}{2} (2x - 2)(x - 2) \\ &= (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Άρα $E = x^2 - 3x + 2$, $x > 2$ και τη χρονική στιγμή t είναι

$$E = E(t)$$

$$x = x(t)$$

Οπότε $E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

$$\text{Άρα } E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t)$$

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε ότι

$$E'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \text{ τ. μ./sec}$$

αφού $M \equiv B \Leftrightarrow x(t_0) = 3$ και $y(t_0) = 4$ και $x'(t_0) = 2$

Γ4. Για τα x κοντά στο $-\infty$ ισχύει ότι

$$f(x) = -2x - 2$$



- Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Θέτω $u = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u}$$

$$\text{Τότε για } u > 0: -1 \leq \eta\mu u \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{u} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq \frac{1}{u}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0 \text{ οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$$

- Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$

Θέτω $u = -x \Leftrightarrow x = -u$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1-(-u)^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{1+u^3}, \text{ αφού } f(u) = u^3 - u \text{ για } u > -1 \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i) Με $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία της f και τα ακρότατα φαίνονται στον πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		\downarrow	\uparrow
		$f(1) = 1 - \ln 3 < 0$	

Άρα η f είναι \downarrow $A_1 = (0, 1]$

και \uparrow $A_2 = [1, +\infty)$



Επίσης παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, διότι $e < 3 \Leftrightarrow$

$$\ln e < \ln 3 \Leftrightarrow 1 < \ln 3$$

- Αν $x \in A_1$ η f , ως συνεχής και $\downarrow A_1$ έχει σύνολο τιμών

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = +\infty$$

- Αν $x \in A_2$ η f , ως συνεχής και $\uparrow A_2$ έχει σύνολο τιμών

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) \stackrel{+\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right] = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3x}{x} \stackrel{\text{DL}}{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Το $0 \in f(A_1) \Leftrightarrow$ υπάρχει $x_1 \in A_1 = (0, 1]$ ώστε $f(x_1) = 0$

και είναι μοναδικό γιατί είναι $f \downarrow A_1$

$$\begin{aligned} \text{επίσης } x_1 < 1 &\Leftrightarrow f(x_1) > f(1), \text{ αφού } f \downarrow \\ &\Leftrightarrow 0 > f(1), \text{ αληθής} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα το } x_1 \in (0, 1)$$

Το $0 \in f(A_2) \Leftrightarrow$ υπάρχει $x_2 \in A_2 = (0, 1]$ ώστε $f(x_2) = 0$

και είναι μοναδικό διότι $f \uparrow A_2$

$$\begin{aligned} \text{επίσης } x_2 > 1 &\Leftrightarrow f(x_2) > f(1) \Leftrightarrow 0 > 1 - \ln 3 \\ &\Leftrightarrow 1 > \ln 3, \text{ αληθής} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα το } x_2 \in (1, +\infty)$$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $0 < x_1 < 1 < x_2$

ii) Είναι $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in A = (0, +\infty)$

Άρα f κυρτή.

Δ2. Η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $B(x_1, 0)$ και $\Gamma(x_2, 0)$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι



$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

Θα βρούμε το πρόσημο της f στο $[x_1, x_2]$

- Αν $x_1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x)$, αφού $f \downarrow A_1$
 $\Leftrightarrow 0 \geq f(x)$
- Αν $1 \leq x \leq x_2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_2)$, αφού $f \uparrow A_2$
 $\Leftrightarrow f(x) \leq 0$

Άρα $f(x) \leq 0$ στο $[x_1, x_2]$

$$\begin{aligned} \text{και } E &= \int_{x_1}^{x_2} -f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x)' f(x) dx \\ &= -[xf(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f'(x) dx \\ &= -(x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)) + \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= 0 + \int_{x_1}^{x_2} (x - 1) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{x_2^2}{2} - x_2 - \left(\frac{x_1^2}{2} - x_1\right) \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - x_2 + x_1 \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} - (x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1) \left(\frac{x_2 + x_1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) \end{aligned}$$

Δ3. 1^{ος} τρόπος

Έχουμε αποδείξει στο Δ2 ότι για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ είναι $f(x) \leq 0$

$$-f(x) \geq 0$$

Ισότητα μόνο για $x = x_1$ ή $x = x_2$

$$\text{Άρα } \int_{x_1}^{x_2} (-f(x)) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow E > 0$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \text{ γιατί } x_2 - x_1 > 0 \text{ αφού } x_2 > x_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_2 > 2 - x_1} \quad (1)$$

Επίσης $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1$

$$\Leftrightarrow \boxed{2 - x_1 > 1} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$1 < 2 - x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2), \text{ διότι } f \uparrow [1, +\infty) \text{ και } 2 - x_1, x_2 \in (1, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0, \text{ αφού } f(x_2) = 0$$

2ος τρόπος

Έχουμε

$$0 < x_1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 > -x_1 > -1$$

$$\Leftrightarrow 2 > 2 - x_1 > 1$$

Και η $f(2 - x_1) < 0$ γράφεται

$$\Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2), \text{ αφού } f(x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2 \text{ διότι } 2 - x_1 \text{ και } x_2 \in (1, +\infty) \text{ και } f \uparrow [1, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2 < x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 - 2 > 0} \quad (A)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (A)

Από το ερώτημα Δ2 έχουμε ότι

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$$

Όμως $E > 0$.

$$\text{Άρα } \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \text{ αφού } \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$$

Δ4. 1ος τρόπος

Επειδή η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

$$y = f'(x_2)(x - x_2) \text{ γιατί } f(x_2) = 0$$



Έτσι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$f(x) \geq y \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow 1 + f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + 1$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν ισχύει:

$$2f(x) + \ln 3 \geq 1 + f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + \ln 3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x - \ln(3x) + \ln 3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x - \ln x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq \ln x \text{ αληθής για κάθε } x > 0 \text{ και ισότητα μόνον για } x = 1$$

Δηλαδή για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$2f(x) + \ln 3 \geq 1 + f(x) \geq 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

και ισότητα αριστερά μόνο για $x = 1$

δεξιά μόνο για $x = x_2$

Άρα $2f(x) + \ln 3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ για κάθε $x > 0$

Επομένως η εξίσωση $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ είναι αδύνατη.

2ος τρόπος

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1 - \ln 3$ οπότε

$$f(x) \geq 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(x) + \ln 3 - 1 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ (4)

Από την (3) έχουμε ότι

$$f(x) \geq f'(x_2) \cdot (x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0 \quad (5) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_2$

τότε

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow (f(x) + \ln 3 - 1) + (f(x) - f'(x_2)(x - x_2)) = 0$$

(4)

(5) $\Leftrightarrow f(x) + \ln 3 - 1 = 0$ και $f(x) - f'(x_2)(x - x_2) = 0$ διότι το άθροισμα δύο μη αρνητικών αριθμών είναι ίσο με το 0 όταν και οι δύο αριθμοί είναι ίσοι με 0

$$\Leftrightarrow x = x_2 \text{ και } x = 1 \text{ άτοπο}$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.



3^{ος} τρόπος

Η εξίσωση $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ γράφεται:

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 + \ln 3 = f'(x_2)(x - x_2) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - (1 - \ln 3) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x) + f(x_2) \text{ διότι } f(x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x) + f(x_2)$$

(E)

- Αν $x = x_2$ η (E) γίνεται: $-f(1) = 0$ άτοπο, αφού $f(1) < 0 \Leftrightarrow -f(1) > 0$

- Αν $x \neq x_2$ τότε η (E) γράφεται:

$$(E) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - x_2} = f'(x_2) - \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

Στο διάστημα $[x_2, x]$ αν $x > x_2$

ή $[x, x_2]$ αν $x < x_2$

ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ μεταξύ του x και x_2 , ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \text{ και}$$

η (E) γράφεται:

$$(E) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - x_2} = f'(x_2) - f'(\xi) \quad (I)$$

Τώρα αν: • $x_2 < \xi < x$ τότε $\frac{f(x) - f(1)}{x - x_2} > 0$ ενώ

$$f'(x_2) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x_2) - f'(\xi) < 0$$

Άρα η (I) \Leftrightarrow (E) είναι αδύνατη.

• $x < \xi < x_2$ τότε $\frac{f(x) - f(1)}{x - x_2} < 0$ ενώ

$$f'(x_2) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x_2) - f'(\xi) > 0,$$

άρα πάλι η (I) \Leftrightarrow (E) είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση (E) δεν έχει λύση.