ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα σχ. βιβλίου σελ.74

Α2. Ορισμός σχ. βιβλίου σελ.104

Α3. α) Ψευδής

β) Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι $\uparrow$ $\mathbb{R}$, διότι,

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1{}^3 < x_2{}^3$

$$\Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ενώ $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$ και όχι $f'(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$

Α4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (1, +\infty)$, $D_g = \mathbb{R}$

Η fog ορίζεται όταν: $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $D_{fog} = (0, +\infty)$

και $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(e^x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $(fog)(x_1) = (fog)(x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow 3e^{x_2} = 3e^{x_1}$$

$$\Leftrightarrow e^{x_2} = e^{x_1}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{διότι } e^x \text{ «1-1»}$$

Άρα η fog είναι «1-1» συνεπώς αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης λύνουμε ως προς $x \in (0,+\infty)$ την εξίσωση

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1}=y$$

$$\Leftrightarrow e^x+2=ye^x-y$$

$$\Leftrightarrow e^x-ye^x=-y-2$$

$$\Leftrightarrow (1-y)e^x=-y-2$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{-y-2}{1-y} \quad \text{με} \quad 1-y\neq 0 \Leftrightarrow y\neq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \quad \text{με} \quad \frac{y+2}{y-1}>0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(y-1)>0$$

$$\Leftrightarrow y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty) \quad (1)$$

y	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(y+2)(y-1)$		+	0	−	0	+	

και $x>0 \Leftrightarrow \ln\frac{y+2}{y-1}>0$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>\ln 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1}>1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1}-1>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1}>0 \Leftrightarrow y>1 \quad (2)$$

Από (1), (2) $y>1$

Άρα $(fog)\big((0,+\infty)\big)=(1,+\infty)=D_{(fog)^{-1}}$ και $(fog)^{-1}(y)=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$

Επομένως $(fog)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$

B3. Η φ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων $\frac{x+2}{x-1}$, $\ln x$

με $$\varphi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{(x+2)'(x-1)-(x-1)'(x+2)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x+2)(x-1)}<0 \quad \text{για κάθε } x>1$$

Άρα $\varphi \downarrow (1,+\infty)$.

Β4. $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

Θέτω $u = \dfrac{x+2}{x-1}$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2) = 3$
- για $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} u = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{u\to +\infty}\ln u = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\dfrac{x+2}{x-1}$

Θέτω $v = \dfrac{x+2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} v = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x} = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{v\to 1}\ln v = \ln 1 = 0$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \ln\lambda\,, & x \le 0 \\ \etaμx + \lambda συνx\,, & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

Γ1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

και είναι συνεχής, οπότε συνεχής και στο 0

Άρα $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \quad (1)$

$f(0) = 1 - \ln\lambda$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(ημx + \lambda συνx) = \lambda$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda$

Άρα από $(1) \Leftrightarrow 1 - \ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0 \;\; (2)$

Έστω $g(x) = \ln x + x - 1$ με $x > 0$

Τότε $g(1) = 0$ και g παραγωγίσιμη με $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$, για κάθε $x > 0$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε και «1-1»

Έτσι, από $(2) \Leftrightarrow g(\lambda) = g(1) \Leftrightarrow \lambda = 1$

Γ2. Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Με $x < 0$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, άρα $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \dfrac{x}{x(1-x)} = \dfrac{1}{1-x}$,

$$\text{οπότε} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

Με $x > 0$, $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, οπότε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$$

Οπότε $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

Είναι $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$,

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0) = 1$

Επομένως, ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω, τέτοια, ώστε

$$f'(0) = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \quad \text{διότι} \quad 0 \le \omega < \pi$$

Γ3. Κρίσιμο σημείο της f είναι οποιοδήποτε $x_o \in \left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ στο οποίο δεν ορίζεται η f' ή ισχύει $f'(x_o) = 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x < 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1 \neq 0$, όπως αποδείξαμε στο **Γ2.**

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$ (1) $\Leftrightarrow 1 = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ Είναι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ διότι

αν $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow \eta\mu x = 0$

Από (1) άτοπο

διότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \kappa\pi < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{5}{4}$$

και επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$

Άρα $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$

Τελικά, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x_1 = \frac{\pi}{4}$ και $x_2 = \frac{5\pi}{4}$

Γ4. Αποδείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0]$ με $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \le 0$

(ισχύει και για $x = 0$ αφού $f'(0) = 1$)

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(1-\alpha)^2}x + \frac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Για $y = 0$, προκύπτει $x = 2\alpha - 1$

Άρα το B έχει τετμημένη $x = 2\alpha - 1$.

Είναι $\alpha = \alpha(t)$ και $x = x(t)$, οπότε $x(t) = 2\alpha(t) - 1$ και παραγωγίζοντας

προκύπτει $x'(t) = 2\alpha'(t) \Leftrightarrow x'(t) = -\frac{2\alpha(t)}{3}$

Τη χρονική στιγμή t_o είναι $\alpha(t_o) = -1$,

άρα ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του B είναι

$$x'(t_o) = \frac{2}{3}\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως θέσεις πιθανών ακροτάτων είναι μόνον οι ρίζες της $f'(x) = 0$

- Με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = e^x + 2x - e$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα $f' \uparrow \mathbb{R}$

- $\left.\begin{array}{l} \text{Η } f' \text{ είναι συνεχής στο } [0,1] \\ f'(0) = 1 - e < 0 \\ f'(1) = 2 > 0 \end{array}\right\}$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o) = 0$

  Επίσης η ρίζα x_o είναι μοναδική διότι $f' \uparrow \mathbb{R}$

- Αν $x < x_o \Rightarrow f'(x) < f'(x_o) = 0$ διότι $f' \uparrow \mathbb{R}$

  Αν $x > x_o \Rightarrow f'(x) > f'(x_o) = 0$ διότι $f' \uparrow \mathbb{R}$

Έτσι το πρόσημο της f' η μονοτονία της f και τα ακρότατα φαίνονται στον πίνακα.

x	$-\infty$		x_o		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o \in (0,1)$, το $f(x_o) = x_o^2 + e^{x_o} - ex_o - 1$ το οποίο είναι μοναδικό, διότι η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_o \in (0,1)$

Έχουμε ότι $\quad f(x_o) = e^{x_o} + x_o^2 - ex_o - 1 \quad (1)$

και $\quad f'(x_o) = 0$

$\Leftrightarrow e^{x_o} + 2x_o - e = 0$

$\Leftrightarrow e^{x_o} = e - 2x_o$

Επομένως η (1) γράφεται:

$f(x_o) = e - 2x_o + x_o^2 - ex_o - 1 = x_o^2 - (e+2)x_o + e - 1$

Δ2. Επειδή $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x) - f(x_o)\right) = 0$ διότι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$ αφού f συνεχής στο x_o

και $f(x) - f(x_o) > 0$ για κάθε $x \neq x_o$

διότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μοναδικό στο x_o

και $f(x) > f(x_o)$ για κάθε $x \neq x_o$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{1}{f(x) - f(x_o)} = +\infty$

Επίσης με $x \neq x_o$ ισχύουν

$\eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_o}\right) \geq -1$

$\dfrac{1}{f(x) - f(x_o)} + \eta\mu\left(\dfrac{1}{x - x_o}\right) \geq -1 + \dfrac{1}{f(x) - f(x_o)}$

και επειδή $\lim\limits_{x\to x_o}\left(-1 + \dfrac{1}{f(x) - f(x_o)}\right) = +\infty$ είναι και

$\lim\limits_{x\to x_o}\left[\dfrac{1}{f(x) - f(x_o)} + \dfrac{1}{\eta\mu(x - x_o)}\right] = +\infty$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x - x_o$

- Η h είναι συνεχής στο $[x_o, 1]$ ως πράξη συνεχών στο $\mathbb{R}$
- $h(1) = f(1) + 1 - x_o = 1 - x_o > 0$, διότι $x_o < 1$

x	$-\infty$	0	x_o		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- $h(x_o) = f(x_o) + x_o - x_o = f(x_o) < 0$, διότι

$$x_o > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_o) < f(0) \text{ διότι } f\downarrow (-\infty, x_o] \text{ και } x_o, 0 \in (-\infty, 0]$$

$$\Leftrightarrow f(x_o) < 0$$

Άρα, από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_o, 1)$ ώστε $h(\rho) = 0$

<u>Μοναδικότητα</u>

Επειδή $h'(x) = f'(x) + 1 > 0$, διότι για κάθε $x > x_o$ ισχύει

$$f'(x) > f'(x_o) = 0, \text{ διότι } f'\uparrow \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) > 0 \text{ στο } (x_o, +\infty)$$

Άρα $h \uparrow (x_o, +\infty)$

Επομένως η ρίζα της $h(x) = 0$ είναι μοναδική.

Άρα και η εξίσωση $f(x) + x = x_o$ έχει μοναδική ρίζα ρ στο $(x_o, 1)$

Δ4. Γνωρίζουμε από το ερώτημα **(Δ3)** ότι

$$f(\rho) + \rho = x_o \Leftrightarrow f(\rho) = x_o - \rho$$

Έτσι η αποδεικτέα γράφεται:

$$f(x_o) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x_o) > (x_o - \rho)(f'(\kappa) + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_o)}{x_o - \rho} < f'(\kappa) + 1 \quad \text{διότι } x_o - \rho < 0 \text{ αφού } x_o < \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_o)}{x_o - \rho} - 1 < f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_o) - (x_o - \rho)}{x_o - \rho} < f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_o) - f(\rho)}{x_o - \rho} < f'(\kappa) \quad (1)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (1)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [x_o, \rho] \\ \quad \text{παραγωγίσιμη στο } (x_o, \rho)\end{array}\right\} \text{ ως παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}$$

άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $x_1 \in (x_o, \rho)$ ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_o) - f(\rho)}{x_o - \rho} \quad (2)$$

Όμως $x_1 < \rho < \kappa < 1 \Longrightarrow f'(x_1) < f'(\kappa)$ διότι $f' \uparrow \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_o) - f(\rho)}{x - \rho} < f'(\kappa), \text{ λόγω της } (2)$$

Έτσι αποδείχτηκε η (1), άρα και η αρχική.