ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα, Σχολικό σελ. 111

Α2. Ορισμός, Σχολικό σελ. 104

Α3. Θεώρημα, Σχολικό σελ. 74

Α4. **α)** Ψευδής

β) Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x$ έχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ενώ το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

Α5. **α)** Σ

β) Σ

γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{3x_1+1}{x_1-3}=\dfrac{3x_2+1}{x_2-3}$

$\Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3)$

$\Leftrightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3$

$\Leftrightarrow 10x_1=10x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

άρα η f «1-1», συνεπώς αντιστρέφεται

Β2. Για την εύρεση της αντίστροφης λύνουμε ως προς $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ την εξίσωση

$y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{3x+1}{x-3}\Leftrightarrow yx-3y=3x+1$

$\Leftrightarrow (y-3)x=3y+1 \quad (1)$

- Αν $y-3=0\Leftrightarrow y=3$ η $(1)\Rightarrow 0\cdot x=10$ αδύνατη, άρα $3\notin f(\mathbb{R}-\{3\})$

- Αν $y \neq 3$, η (1)$\Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}$

Πρέπει $x \neq 3 \Leftrightarrow \frac{3y+1}{y-3} \neq 3 \Leftrightarrow 3y+1 \neq 3y-9 \Leftrightarrow 1 \neq -9$ άρα $y \in \mathbb{R}$

Έτσι $f(\mathbb{R}-\{3\}) = \mathbb{R}-\{3\} = D_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3}$ ή $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Είναι } D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}-\{3\} \\ \text{και } f^{-1}(x) = f(x) = \dfrac{3x+1}{x-3} \end{array}\right] \text{, άρα } f = f^{-1}$$

Β3. Η fof ορίζεται όταν $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ \dfrac{3x+1}{x-3} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 3$

Άρα $D_{fof} = \mathbb{R}-\{3\}$ και

$$(fof)(x) = f(f(x)) = \frac{3\dfrac{3x+1}{x-3}+1}{\dfrac{3x+1}{x-3}-3} = \frac{\dfrac{9x+3+x-3}{x-3}}{\dfrac{3x+1-3x+9}{x-3}} = \frac{10x}{10} = x$$

Β4. Με x κοντά στο $-\frac{1}{3}$, $\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |f(x)|\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right| \leq |f(x)|$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right| \leq |f(x)|$$

$$\Leftrightarrow -|f(x)| \leq f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} = \frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)+1}{-\frac{1}{3}-3} = \frac{0}{-\frac{10}{3}} = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} |f(x)| = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0$ και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = \frac{1}{2}(B\Gamma)(AM)$

- Από το ορθογώνιο $\overset{\Delta}{OMB}$ έχουμε:

– $\eta\mu\theta = \frac{BM}{OB} \Rightarrow BM = \eta\mu\theta \Rightarrow 2BM = 2\eta\mu\theta \Rightarrow B\Gamma = 2\eta\mu\theta$

– $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{OB} \Rightarrow OM = \sigma\upsilon\nu\theta$ άρα $AM = OA + OM \Rightarrow AM = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα $E = \frac{1}{2} 2ημθ(1 + συνθ) = ημθ(1 + συνθ), \; θ \in (0, π)$

Παρατήρηση: Αν $θ \in \left[\frac{π}{2}, π\right)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον ίδιο τύπο.

Γ2. Έστω $E(θ) = ημθ(1 + συνθ), \; θ \in (0, π)$.

Η E παραγωγίσιμη στο $(0, π)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$E'(θ) = συνθ(1 + συνθ) - ημ^2θ = συνθ + συν^2θ - ημ^2θ = συνθ + συν^2θ + συν^2θ - 1$

$$E'(θ) = 0 \Leftrightarrow 2(συνθ + 1)\left(συνθ - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow συνθ = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow θ = \frac{π}{3} \quad \text{διότι } θ \in (0, π)$$

Είναι $E'(θ) \neq 0 \Leftrightarrow θ \in \left(0, \frac{π}{3}\right) \cup \left(\frac{π}{3}, π\right)$

Άρα η E' διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{π}{3}\right), \left(\frac{π}{3}, π\right)$ και είναι:

$E'\left(\frac{π}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, άρα $E'(θ) > 0$ στο $\left(0, \frac{π}{3}\right)$

$E'\left(\frac{π}{2}\right) = -1 < 0$, άρα $E'(θ) < 0$ στο $\left(\frac{π}{3}, π\right)$

Το πρόσημο της E' φαίνεται στον πίνακα

$θ$	0		$\frac{π}{3}$		$π$
$E'(θ)$		$+$	0	$-$	
$E(θ)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Επομένως η E παρουσιάζει μέγιστο για $θ = \frac{π}{3}$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(θ) = \frac{3}{4}, \; θ \in (0, π)$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $θ_1, θ_2$ με $θ_1 < θ_2$

- E συνεχής στο $\left(0, \frac{π}{3}\right] = Δ_1$, άρα $E(Δ_1) = \left(\lim_{θ \to 0} E(θ), E\left(\frac{π}{3}\right)\right] = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$
  $E \uparrow Δ_1$

  διότι: $\lim_{θ \to 0} E(θ) = \lim_{θ \to 0} ημθ(1 + συνθ) = ημ0(1 + συν0) = 0$

  $$E\left(\frac{π}{3}\right) = ημ\left(\frac{π}{3}\right)\left(1 + συν\frac{π}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

  Το $\frac{3}{4} < \frac{3\sqrt{3}}{4}$ άρα $\frac{3}{4} \in E(Δ_1)$ οπότε υπάρχει $θ_1 \in E(Δ_1)$ ώστε $E(θ_1) = \frac{3}{4}$

Το θ_1 είναι μοναδικό διότι E «1-1» ως γνησίως αύξουσα στο Δ_1

- E συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right) = \Delta_2$, $E \downarrow \Delta_2$, άρα $E(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{\theta\to\pi} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

διότι: $\lim\limits_{\theta\to\pi} E(\theta) = \lim\limits_{\theta\to\pi} \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) = \eta\mu\pi(1+\sigma\upsilon\nu\pi) = 0$

Το $\frac{3}{4} \in E(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $\theta_2 \in \Delta_2$ ώστε $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

Το θ_2 είναι μοναδικό διότι E «1-1» ως γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

Άρα υπάρχουν ακριβώς 2 γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$ για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$ $\left(\theta_1 \neq \theta_2,\ \text{διότι } E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \neq \frac{3}{4}\right)$

Γ4. Η E είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν:

$$\xi_1 \in \left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right) \text{ ώστε } E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - E(\theta_1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \quad (1)$$

και

$$\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right) \text{ ώστε } E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)E'(\xi_2) = \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έπεται ότι

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} + \ln x$$

Για $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ και $\ln x > 0$ οπότε $f'(x) > 0$

Για $0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ και $\ln x < 0$ οπότε $f'(x) < 0$

Επίσης $f'(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	Ελάχιστο	↗	

Η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Άρα η f έχει ελάχιστο για $x_o = 1$ το $f(1) = -\ln\lambda$

Τότε $A(1,-\ln\lambda)$, $\lambda \in (0,+\infty)$

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο ακρότατου της f. Τότε $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\ln\lambda,\ \lambda > 0 \end{cases}$

Άρα η ευθεία στην οποία ανήκουν τα σημεία M είναι η $x = 1$

Δ2. Έχομε ότι $\quad x^x \geq \lambda x$

$$\Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \text{ διότι } \ln x \uparrow (0,+\infty)$$

$$\Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0,\ \ x > 0 \ \ (1)$$

Όμως $f(x) \geq -\ln\lambda,\ \lambda > 0$ για κάθε $x > 0$

Πρέπει $-\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει η (1) είναι η $\lambda = 1$

Δ3. Η $g(x) = x^x = e^{x\ln x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $g'(x) = (1+\ln x)e^{x\ln x}$

Η εφαπτομένη της C_g στο $A(x_o, g(x_o))$, $x_o > 0$ είναι η

$\varepsilon: \quad y - g(x_o) = g'(x_o)(x - x_o)$

$\Leftrightarrow y - e^{x_o\ln x_o} = (1+\ln x_o)e^{x_o\ln x_o}(x - x_o)$

Όμως $O(0,0) \in \varepsilon \Leftrightarrow 0 - e^{x_o\ln x_o} = (1+\ln x_o)e^{x_o\ln x_o}(0 - x_o)$

$$\overset{e^{x_o\ln x_o}}{\Longleftrightarrow} - e^{x_o\ln x_o} = -x_o e^{x_o\ln x_o} - x_o \ln x_o e^{x_o\ln x_o}$$

$$\Leftrightarrow -1 = -x_o - x_o\ln x_o$$

$$\Leftrightarrow x_o\ln x_o + x_o - 1 = 0$$

$$\overset{x_o>0}{\Longleftrightarrow} \ln x_o + 1 - \frac{1}{x_o} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_o) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_o = 1$$

Άρα $\varepsilon: \quad y - g(1) = g'(1)(x-1)$

$$\Leftrightarrow y - 1 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x$$

Έχουμε ότι $h(x)=\begin{cases} e^{x\ln x}, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Δ4. i) Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=h(0)$

Θέτω $u=x\ln x,\ x>0$

Τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} u=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=\lim\limits_{u\to 0} e^u=1=h(0)$

Άρα η h είναι συνεχής στο $x_o=0$

Η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Άρα η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

ii) Έστω $K(x)=x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)dt,\ x\in\mathbb{R}$

Η K είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

$K(0)=\int_0^1 h(1-t)dt$

$K(1)=3-2\int_1^2 g(t)dt$

Για $t\in[0,1]$ έχουμε ότι $h(t)>0$

Όμως $0\le 1-t\le 1$ οπότε $h(1-t)>0$

Επίσης η $h(1-t)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών οπότε

$$\int_0^1 h(1-t)dt>0 \Leftrightarrow K(0)>0$$

Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g''(x)=\frac{1}{x}e^{x\ln x}+(1+\ln x)^2e^{x\ln x}$

τότε $g''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Τότε η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $A(1,g(1))$ εκτός του σημείου επαφής.

Τότε $g(t)\ge t$, για κάθε $t\in(0,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t=1$

Τότε $\int_1^2 g(t)dt>\int_1^2 tdt \Leftrightarrow \int_1^2 g(t)\,dt>\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 g(t)\,dt>\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3-2\int_1^2 g(t)dt<0 \Leftrightarrow K(1)<0$$

Άρα $K(0)\cdot K(1)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $K(x_o)=0$